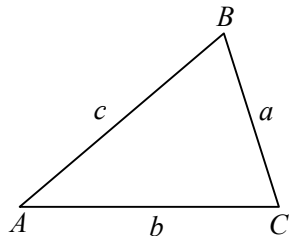


Теорема синусов

Теорема. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.



Дано: $\triangle ABC$, $BC = a$,
 $AC = b$, $AB = c$.

Доказать: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

Доказательство

По теореме о площади треугольника

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C, S = \frac{1}{2}bc \sin A, S = \frac{1}{2}ac \sin B.$$

Из первых двух равенств получаем $\frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A$,

$$a \sin C = c \sin A \mid : (\sin A \sin C) \neq 0,$$

$$\frac{a \sin C}{\sin A \sin C} = \frac{c \sin A}{\sin A \sin C}, \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

Точно так же из второго и третьего равенств получаем

$$\frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A, a \sin B = b \sin A \mid : (\sin A \sin B) \neq 0,$$

$$\frac{a \sin B}{\sin A \sin B} = \frac{b \sin A}{\sin A \sin B}, \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

$$\text{Т.к. } \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \text{ и } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ то } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Итак, стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов.

Ч.т.д.

Замечание. Отношение стороны треугольника к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

где R – радиус описанной окружности.